Sesión preparatoria Olimpiada Nacional 2016-17

Sevilla, 17 de febrero de 2017

(Grupo 1)

1.- Determinar para qué valores de *n*∈*N* es verdadera la desigualdad *2n > n2 + 4n + 5*

2.- Sean *x*1, *x*2, ···, *x*n, números enteros tales que se pueden expresar como suma de dos cuadrados perfectos. Probar que su producto, *x*1· *x*2 ··· *x*n puede expresarse igualmente como suma de dos cuadrados perfectos. ------- (*Olimpiada matemática alemana, 2013*)

3.- Para cada número natural *n>0* escribimos: $(1+\sqrt{2} )^{2n+1}= a\_{n}+ b\_{n}√2$ definiéndose así las sucesiones de enteros {*an*}, {*bn*}.

a) Demostrar que *an*, *bn* son impares para cada *n*.

b) Demostrar que *bn* es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos:

$$\frac{a\_{n}+ (-1)^{n}}{2} y \frac{a\_{n}- (-1)^{n}}{2}$$

------ (*Fase Local Olimpiada País Vasco, 1992*)

4.- En un torneo cada jugador juega con cada uno de los otros jugadores exactamente una vez, y en cada juego hay un ganador y un perdedor.

Decimos que los jugadores *p1, p2 . . . , pm* forman un ciclo de longitud *m* si *p1* le gana a *p2*, *p2* le gana a *p3, . . ., pm−1*le gana a *pm*, y *pm* le gana a *p1*.

Demostrar que si hay un ciclo *p1, p2, . . . , pm* (*m ≥ 3*), entonces hay un ciclo de longitud 3.

5.- Si *a, b, c* son enteros tales que *a6 +2**b6 = 4c6*, demuéstrese que *a = b = c = 0*.

6.- Sea $f:N-\rightarrow N$ una función definida de manera recursiva así:

*f(1) = 25*; *f(n+1)= f(n) +4*

conjeturar un valor explícito para  *f(n)* y probarlo por inducción.

7.- Sea *f* definida así:

*f(1) =1996; f(1) + f(2) + ··· + f(n) = n2·f(n),* para todo  *n>1.*

Calcular el valor exacto de f(1996) *---* (*Olimpiada Británica, 1996*)

8.- Con pesas de 1, 3, 32 , 33, ··· , 3n kgs., ¿cuántas pesadas distintas no nulas pueden realizarse con una balanza de platillos?

(Nota: dos combinaciones distintas de pesas dan pesadas distintas)

(Grupo 2)

1.- El problema de Josephus:

En una reunión hay n persona sentadas alrededor de una mesa y numeradas de 1 a n. Se comienza por la número 1 y se elimina la segunda; se continúa así con la siguiente persona y eliminando siempre la segunda. Y así hasta que todas, salvo una, quedan eliminadas. ¿Cuál es la persona que se salva?

2.- [+] Sin usar ninguna tabla encontrar el valor exacto de:

P = $\cos(\frac{π}{15})\cos(\frac{2π}{15}) \cos(\frac{3π}{15})\cos(\frac{4π}{15}) \cos(\frac{5π}{15}) \cos(\frac{6π}{15}) \cos(\frac{7π}{15}) $

[Indicación: utilizar la siguiente fórmula que deberá demostrarse por inducción:

$\cos(x)\cos(2x)\cos(4x)··· \cos(2^{n-1}x)= \frac{\sin(2^{n}x)}{2^{n} \sin(x)}$ ] ----- (*Olimpiada húngara 1967, sin la indicación*)

3.-Sea *f* definida así:

*f(1) =1996; f(1) + f(2) + ··· + f(n) = n2·f(n),* para todo  *n>1.*

Calcular el valor exacto de f(1996) *---* (*Olimpiada Británica, 1996*)

4.-[\*,+] Encontrar, si existen, todas las cuaternas de números enteros positivos

*(x, y, z, t),* que verifiquen *x2 + y2 = 7(z2 + t2)*

5.- [\*] Si *a, b, c* son enteros tales que *a6 +2b6 = 4c6*, demuéstrese que *a = b = c = 0*.

6.- [+] Si *a****,*** *b* son enteros positivos tales que (*a2 +b2*)/ (*1+ab*) es entero, entonces demuestre que (*a2 +b2*)/ (*1+ab*) es un cuadrado perfecto. ------ (*IMO 1988*)

----------------------------

Propuestos por J. Benabent (de Internet, para la sesión)

7.- Encuentra **a** y **b** tal que

34! = 29523279979039**a**041408476186096435**b**0000000

8.- Si *a + 1/a* es un número entero, siendo a un número real, prueba que *an + 1/an*

9.- Sea M un conjunto de 65 números enteros menores o iguales que 2016. Prueba que entre los números de M hay cuatro, *a,b,c,d* distintos tales que *a + b – c – d* es múltiplo de 2016.

10.- Sea *(p, a, b, c)* una cuaterna de números enteros tales que *p* es primo impar y *a, b, c* son distintos entre sí. Probar que si *ab + 1, bc + 1, ac + 1*, son congruentes con 0 *mód*. *p,* entonces *p+2 ≤ (a + b + c)/3*